Technische Mechanik

Zusammenfassung & Formelsammlung

Raphael Theiler
rtheiler@ee.ethz.ch

1 Grundlagen

1.1 Mixed

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

1.2 Freiheitsgrad

- Punkt im Raum: $f = 3$
- Starrer Krper: $f = 6$
- Allgemein: $f = \left(\sum f_i\right) - b$
  $b =$ Anzahl (lin. unabh.) der Bindungsgleichungen

1.3 Kartesische Koordinaten

$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$
$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \cdot \vec{e}_x + \dot{y} \cdot \vec{e}_y + \dot{z} \cdot \vec{e}_z$
$s = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$
$a = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x} \cdot \vec{e}_x + \ddot{y} \cdot \vec{e}_y + \ddot{z} \cdot \vec{e}_z$

1.4 Zylinderkoordinaten

$\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z$
$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z} \cdot \vec{e}_z$
$= \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{z} \cdot \vec{e}_z$
$s = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2}$
$a = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \cdot \vec{e}_z$

1.5 (ebene) Polarkoordinaten

$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$
$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$
$s = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$
$a = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi$

1.6 Sinus & Cosinus

	$0°$ 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

2 Statik

2.1 Satz der Projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)

Die Projektionen $\vec{v}'_P, \vec{v}'_Q$ der Geschwindigkeiten von zwei beliebigen Punkten P und Q eines starren Körpers auf ihre Verbindungsgerade sind gleich: $\vec{v}'_P = \vec{v}'_Q$
Satz: Ein Körper bewegt sich genau dann starr, wenn der SdpG fr beliebige Punktepaare gilt.
2D: $\vec{v}'_p = \vec{v}_p \cdot \cos(\alpha)$

2.2 Momentanzetrum:

Rotation des Punktes P um das Momentanzentrum M. $\vec{v}_p$ steht Senkrecht zur Verbindungsgerade von M und P.
$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MP}$
2D: $v_P = \omega \cdot r_{MP}$

2.3 Rollbedingung

$\vec{v}_{\text{Berührungspunkt}} = \vec{v}_{\text{Boden}}$ (meistens=0)

2.4 Starrer Körper

Satz: Eine starre Bewegung ist (momentan) entweder eine Translation, eine Rotation oder eine Schraubung.
$\vec{v}_p = \vec{v}_q + \vec{\omega} \times \vec{r}_{QP}$

Kinemate:	Invariante 1	Invariante 2
$\{\vec{v}_P, \vec{\omega}\}$	$I_1 = \vec{\omega}$	$I_2 = \vec{v}_P \cdot \vec{\omega}$
Translation	$\vec{\omega} = 0$	
Rotation	$\vec{\omega} \neq 0$	$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega}$
Schraubung		$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \neq 0$

Schraubung: Überlagerung einer Rotation und einer Translation in Richtung der Rotationsachse.

2.5 Äquivalenz und Reduktion von Kräftegruppen

- **Satz:** Zwei Kräftegruppen sind genau dann statisch aquivalent, wenn ihre Rsultierenden und ihre Momente (bezüglich eines Beliebigen Punktes P) gleich sind.
- **statisch äquivalent null:** Wenn bei einer Kräftegruppe die Resultierende $\vec{R}$ und das resultierende Moment $\vec{M}_O$ bezüglich O verschwinden.
- **Satz:** Zwei Kräfte sind genau dann statisch äquivalent, wenn sie vektoriell gleich sind und ihre Wirkungslinien übereinstimmen.
- Am Starren Körper ist eine Kraft ein **linienflüchtiger Vektor** und darf längs seiner Wirkungslinie verschoben werden.

2.6 Resultierende Kraft

$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ ist die Resultierende (Summe aller Kräfte)

2.7 Moment

- Resultierendes Moment: $\vec{M}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$
- 2D: $\left|\vec{M}_O\right| = d \cdot \left|\vec{F}\right|$
  Wobei d der kürzeste Abstand der Wirkungslinie er Kraft vom Zeugspunkt O ist.
- 3D: $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$
- $\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{r}_{PO} \times \vec{R}$
- **Moment bezüglich KoordinatenAchse:** Das Moment bezüglich einer Koordinatenachse ist gerade gleich der entsprechenden Komponente des Moments.

2.8 Leistung

Reine Translation: $P = \vec{F}_A \cdot \vec{v}_A$
Reine Rotation: $P = \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$
Allgemein: $P = \vec{R} \cdot \vec{v}_B + \vec{M}_B \cdot \vec{\omega}$
Gesamtleistung: $P = \sum_i P_i$
Eine Kräftegruppe ist in folgenden Fällen **statisch äquivalent**:

Dyname:	Invariante 1	Invariante 2
$\left\{\vec{R}, \vec{M}_O\right\}$	$I_1 = \vec{R}$	$I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_O$
Gleichgew. / Nullsys.:	$\vec{R} = 0$	$\vec{M}_O = 0$
Moment (Kraftepaar):	$\vec{R} = 0$	$\vec{M}_O \neq 0$
Einzelkraft:	$\vec{R} \neq 0$	$\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$
Schraube:	$\vec{R} \neq 0$	$\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$

Kräftepaar: Ein Kräftepaar besteht aus zwei Kräften gleichen Betrags, die auf verschiedenen Wirkungslinien entgegengesetzte Richtungen haben: $\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

2.9 Dipol

Dipolmoment: $\vec{N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \vec{r}_i \quad \vec{M} = \vec{N} \times e$

2.10 Kräftemittelpunkt

$\vec{r}_c = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \vec{r}_i = \frac{N}{R}$

2.11 Printzip der Virtuellen Leistung (PdvL)

Ein system befindet sich genau dann in Ruhe, wenn in dieser Lage die Gesamtleistung aller angreifenden Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet. $\longrightarrow \tilde{p} = \tilde{p_i} + \tilde{p_a} = 0 \forall \{\tilde{v}\}$

2.12 Bestimmtheit

Ein System ist **kinematisch bestimmt**, wenn aufgrund der Lagerung keine zulässige Bewegung möglich ist.
Ein System ist **statisch unbestimmt**, wenn mehr Bindungen als Gleichungen vorhanden sind.

2.13 Reibung

Haftreibung: $\left|\vec{F}\right| \leq \mu_0 \left|\vec{N}\right|$
Gleitreibung: $\left|\vec{F}\right| = \mu_1 \left|\vec{N}\right|$ (Entgegengesetzt zur Geschwindigkeit)
Rollreibung: $\vec{M}_f$ ist entgegengesetzt zu und liegt auf $\vec{\omega}$.
$\left|\vec{M}_f\right| \leq \mu_2 \left|\vec{N}\right|$ (in Ruhe)
$\left|\vec{M}_f\right| = \mu_2 \left|\vec{N}\right|$ (in Bewegung)
μ_2: Rollreibungslänge in $[m]$

3 Dynamik

3.1 Trägheitskräfte

Sind fiktive Kräfte. Sie verletzen das Reaktionsprinzip. (*actio = reactio*)
$d\vec{F}_t = -\rho \vec{a} dV = -\vec{a} dm$. $\vec{F}_t$ entgegengesetzt zu $\vec{a}$ und $\vec{R}$.
Das PdvL ändert sich also folgendermassen: $\longrightarrow \tilde{p} = \tilde{p_i} + \tilde{p_a} + \tilde{p_t} = 0 \forall \{\tilde{v}\}$.
$\omega^2 = \frac{g}{l}, \quad g = \frac{\omega^2}{l}$

3.2 Newtonsches Bewegungsgesetz

Eventuelle Rotation und Deformation interessieren nicht und ändern die Resultierende der äusseren Kräfte nicht.
$\vec{R} = m\vec{a}, \vec{F}_t$ geht **nicht** in $\vec{R}$ ein.
$\dot{p} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{R}$

3.3 Energiesatz

$E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} v^2 dm$. Fr einen Massepunkt: $E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} m v^2$
$\dot{E}_{\text{Kin}} = \tilde{p} = \tilde{p_i} + \tilde{p_a}$
Energiesatz für konservative Systeme: $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} =$ konst. Leitet man den Energiesatz ab, so erhält man eine **Bewegungs-DGL**.
Ruhelage des Systems: In der DGL $\dot{x}, \ddot{x}, ... = 0$ setzen.
Maximale Auslenkung des Systems: $\dot{x} = 0$ in Energiesatz einsetzen.
Das Referenzniveau für die potentiellen Energien wählt man so, dass $E(t) = 0 \forall t$. Dann kann man den Energiesatz $E(\dot{x} = 0) = 0$ setzten und nach $x_{\max}$ auflösen. Fehlende Kräfte können jetzt unter Umständen aus $m\ddot{x} = \vec{R}$ berechnet werden, indem man die DGL nach $\ddot{x}$ auflöst und einsetzt.

3.4 Impulssatz

$\vec{p} = \int_B \vec{v} dm, \quad \dot{\vec{p}} = \vec{R}$
$m_1 v_1 + m_2 V_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$
Inelastischer Stoss: $v_1' = v_2' = v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$
Elastischer Stoss: Energie- und Impulserhaltung:
$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2, \quad v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2$

3.5 Drallsatz

O: Ortsfester Punkt
C: Massenmittelpunkt
$\vec{L}_O = \int\limits_B \vec{r} \times \vec{v} dm$
$\dot{\vec{L}_O} = \vec{M}_O, \quad \dot{\vec{L}_C} = \vec{M}_C, \quad \vec{L}_O = \vec{r}_{OC} \times \vec{p} + \vec{L}_C$
$\dot{\vec{L}_O} = I_O \dot{\omega} = \vec{M}_O$
Anwendung: Ableitung des ralls dem Moment gleichsetzen und in eine DGL umformen.

3.6 Massenträgheitsmoment

$I_O = \int\limits_B r^2 dm, \quad I_C = \int\limits_B r_{CP}^2 dm$
$L_O = I_O \omega = I_O \dot{\varphi}, \quad L_C = I_C \omega = I_C \dot{\varphi}$
$\dot{L}_O = I_O \dot{\omega} = I_O \ddot{\varphi}, \quad \dot{L}_C = I_C \dot{\omega} = I_C \ddot{\varphi}$
Massenpunkt: $I_O = mr^2$
Stab (bezügl. Endpunkt): $I_O = \frac{mL^2}{3}$
Stab (bezügl. Mittelpunkt): $I_O = \frac{mL^2}{12}$
Kreisscheibe (bezügl. Endpunkt): $I_O = \frac{mR^2}{2}$
Ebene Rotation um O: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2$
Kreisfrequenz: $a\ddot{x} + cx + d = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{c}{a}}$

4 Aufgabenbeispiele

Statik: Platte im Gleichgewicht

- Lagerkräfte einführen
- komponentenweise Kraft- und Momentenbedingung aufstellen
- auflösen nach der gesuchten Grösse
- Bedingungen für Gleichgewicht prüfen (z.B. Fadenkräfte > 0)

Statik: Fachwerk

- gesuchten Stab entfernen und durch eine Stabkraft ersetzen
- Bewegungszustand ermitteln
- PdvL formulieren und nach der Stabkraft auflösen

Statik: Reibung

- Haftreibung: $\vec{F}_R$ und $\vec{M}_f$ als unbekannt betrachten. System lösen und anschliessend Bedingungen für Haftreibung prüfen.
- Gleitreibung: Gleitreibung ergibt eine zusätzliche Gleichung, die man normal zusammen mit den Bedingungsgleichungen lösen kann.

Dynamik: Trägheitskräfte

- zusätzliche Kraft $ma = m\ddot{x}$ in entgegengesetzter Richtung zu $\vec{v}$ einführen
- virtuelle Bewegung $\{\tilde{v}_x, \tilde{v}_y\}$ ansetzen, PdvL aufstellen und lösen
- zustzliche Unbekannte zu $\left\{\vec{F}.\vec{N}, ...\right\}$: $x(t)$ - Gleitreibungsgesetz liefert zusätzliche Gleichung(en)
- es ergibt sich eine DGL 2. Ordnung in x: lösen, Anfangsbedingungen einsetzen

Dynamik: Träges mathematisches Pendel

- $\vec{G} = mg\cos\varphi\vec{e}_r - mg\sin\varphi\vec{e}_\varphi, \quad \vec{S} = -S\vec{e}_r$
- $\tilde{p} = ((mg\cos\varphi - S + ml\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r - (mg\sin\varphi + ml\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi) \cdot \tilde{\vec{v}} = 0$
- $\tilde{\vec{v}} = \tilde{v}\vec{e}_\varphi \Rightarrow S = mgcos\varphi + ml\dot{\varphi}^2$
- $\tilde{\vec{v}} = \tilde{v}\vec{e}_r \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$
- $\varphi \ll 1. \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$
- Ansatz: $\varphi(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t), \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \Rightarrow c1 = \varphi_0, c2 = 0$
- Hier: $\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t)$
- $\varphi(t)$ ableiten, einsetzen
$\Rightarrow S(t) = m(l\omega^2\phi_0^2\sin^2(\omega t) + g\cos\varphi) =$
$= mg(\varphi_0^2\sin^2(\omega t) + \cos(\varphi_0\cos(\omega t)))$