Physik I

Zusammenfassung & Formelsammlung

Raphael Theiler

rtheiler@ee.ethz.ch

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

1 Kinematik

1.1 Gleichförmige Bewegung

$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}$
$s = s_0 + vt$

1.2 gleichmässig beschleunigt

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$
$v = v_0 + at$
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$

1.3 Gleichförmige Kreisbewegung

Winkelkoordinate $\varphi = \frac{b}{r}$
$b =$ Bogenmass
$r =$ Radius
Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
Frequenz $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$
Bahngeschwindigkeit $v = r\omega = 2\pi r f = \frac{2\pi r}{T}$
Umlaufzeit (Schwindungsdauer) $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$
Zentripetalkraft $a_z = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

2 Dynamik

Dichte $\rho = \frac{m}{V}$
Kraft $F = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$
Gewichtskraft $F_G = mg$
Gleitreibungskraft $F_R = \mu_G F_N$
Haftreibung $F_R \leq \mu_H F_N$
Federkraft $F_F = Dy$
Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$

2.1 Arbeit &Energie

Arbeit $W = F_s \cdot s = F \cdot \cos\alpha$
Wirkungsgrad $\nu = \frac{W_1}{W_2}$
Kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$
Potentielle Energie $E_{\text{pot}} = mgh$
gespannte Feder $E_F = \frac{1}{2}Dy^2$
Leistung $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

3 BGL nach Newton $m\ddot{x} = K(x, \dot{x}, t)$

3.1 Kräftefrei

$K = 0 = m\ddot{x}$
$x(t) = A + Bt$
$A = x_0 - v_0 \cdot t_0$
$B = v_0$

3.2 Konstante Kraft, $K \neq 0$

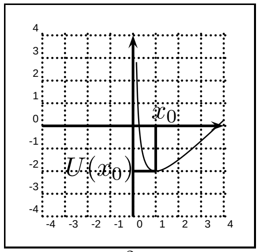
$\ddot{x} = \frac{K}{m}$
$\dot{x} = \frac{K}{2m}t^2 + A \cdot t + B$
$A = v_0 - \frac{K}{m} \cdot t_0$
$B = x_0 - (v_0 - \frac{K}{m} \cdot t_0)t_0 - \frac{K}{2m}t_0^2$

3.3 eindimensionales hom. Kraftfeld

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= K(x,y,z) = 0 \\ m\ddot{y} &= K(x,y,z) = 0 \\ m\ddot{z} &= K(x,y,z) = -m \cdot g \end{aligned}\right] = \begin{array}{c}\text{Beschl. wirkt} \\ \text{uniform nach} \\ \text{unten}\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_x t + B_x \\ y(t) &= A_y t + B_y \\ z(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + A_z + B_z \end{aligned}\right] = \begin{array}{c}\text{mit Anfangsbed.} \\ \text{kann Fall / Wurf} \\ \text{bestimmt werden}\end{array}$$

3.4 Freier harmonischer Oszilator



$K(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$
$U(x) = E_{\text{pot}}$
$m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx}$
approx. bei x_0:
$U(x) \approx U(x_0) + (x - x_0)U'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}U''(x_0)$
Da Min. bei x_0: $U(x) = U(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}U''(x_0)$
$\Rightarrow m\ddot{x} = -(x - x_0)U''(x_0)$
Substitution: $U''(x_0) = k$
$u = x - x_0$
$\ddot{u} + \omega_0^2 = 0$

3.4.1 Allg. Lösung

chp: $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$
$$\begin{aligned} u(t) &= C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) \\ &= A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$
ω_0: Eigen(kreis)frequenz
A: max. Amplitude
φ: Phasenwinkel
$V = \frac{\omega_0}{2\pi}$: Eigenfrequenz
$T = \frac{1}{V} = \frac{2\pi}{\omega_0}$: Schwingungsdauer / Periode

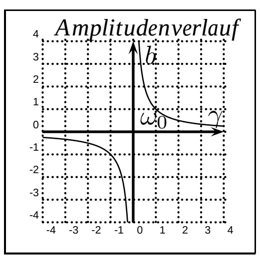
3.4.2 Spezialfälle

- Oszilator zu Beginn um u_0 auslenken:
  $u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = 0$
  $\Rightarrow u(t) = u_o \cos(\omega_0 t)$
  $A = u_0$

- Körper in Ruhelage mit v_0 anstossen:
  $u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = v_0$
  $u(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$
  $A = \frac{v_0}{\omega_0}$

3.5 Erzwungene Schwingung

Zusätzlich zum normalen Kraftfeld haben wir ein äusseres veränderlches Feld, welches wirkt. Zur alten potentiellen Energeie $\frac{k}{2}(x-x_0)^2$ kommt nun noch die potentielle des neuen Feldes hinzu welche wir wie folgt entwickeln: $V(x,t) = V(x_0,t) + (x-x_0) \left.\frac{\delta V}{\delta x}\right|_{x=x_0}$
Das erste Glied hngt von der Zeit ab und kommt in der BGL nicht vor. Das zweite Glied ist die Kraft welche in der Gleichgewichtslage wirkt. wir bezeichnen diese mit: $F(t) = \left.\frac{\delta V}{\delta x}\right|_{x=x_0}$
Die BGL lautet nun wie folgt: $\ddot{u} + \omega_0^2 \cdot u = \frac{1}{m} F(t)$
Spezieller Fall: $F(t)$ ist periodisch abhänig von der Zeit mit der Frequenz γ.
$F(t) = f \cdot \cos(\gamma t)$
Um eine spezielle Lsg. zu erhalten benutzen wir folgenden Ansatz:
$u_{sp} = b \cos(\gamma t)$
chp: $b\gamma^2 - b\omega_o^2 + \frac{f}{m} = 0$
Lösung: $b = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}$
Allg. Lsg. der inhom. DGL:
$A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f}{m\omega_0^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t)$
A und φ ergeben sich aus den Anfangsbed.



Resonanz-Fall: Diese Lösung funktioniert nicht im Resonanzfall ($\gamma = \omega_o$).
In diesem Fall neuer Ansatz:
$u_{sp} = b(\cos(\gamma t) - \cos(\omega_o t))$
Zuerst formell $\gamma \neq \omega_0$:
$-b\gamma^2 \cos(\gamma t) + b\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + b\omega_0^2(\cos(\gamma t) - \cos(\omega_0 t)) =$
$= b(\omega_0^2 - \gamma^2)\cos(\gamma t)$
$= \frac{f}{m} \cos(\gamma t)$
$\Rightarrow b = \frac{f}{m(\omega_o^2 - \gamma^2)}$
Limes $\gamma \to \omega_0$:
$\boxed{b = \frac{f}{2m\omega_0} t \cdot \sin(\omega_0 t)}$
Die Lsg. lautet dann: $u(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f}{2m\omega_0} t \cdot \sin(\omega_0 t)$
Zugefhrte Arbeit (Persiode:$\tau = 2\pi/\omega_0$):
$A = \int\limits_{u(0)}^{u(t)} F dx = \int_0^\pi F(t) \frac{du}{dt} dt$
Falls $\gamma \neq \omega_0$: $A = 0$ (im Interval 0 bis τ)
Falls $\gamma = \omega_0$: $A = \frac{f^2}{8m} r^2$ (im Interval 0 bis τ)

3.6 Gedämpfte Schwingung

Durch z.B. Reibung entsteht eine Kraft die der Bewegung entgegenwirkt. Modelierung:$F_D = -D \cdot \dot{x},\ D > 0$
BGL: $m\ddot{u} = -ku - D\dot{u}$
Freqenz der freien Schwingung$< omega_0^2 = \frac{k}{m}$
Dämpfungskonstante: $2\lambda = \frac{D}{m}$
„schöne“ BGL: $\ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$
Ansatz: $e^{r \cdot t}$
chp: $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$
Lsg: $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$
Allg. Lsg: $u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
Fallunterscheidung:

- $\lambda < \omega_0$:
  2 komplex konjugierte Werte fr $r_{1,2}$:
  $r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{|\lambda^2 - \omega_0^2|}$
  Allg. Lsg in diesem Fall: $u(t) = Ae - -\lambda t \cos(\omega_D \cdot t + \varphi)$
  $\omega_D = \sqrt{|\lambda^2 - \omega_0^2|}$
  $\to$ *sog. gedämpfte Schwingung*

- $\lambda > \omega_0$:
  Allg. Lsg in diesem Fall:
  $u(t) = c_1 e^{-(<lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2})t} +$
  $c_2 e^{-(<lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2})t}$
  $\to$ *Annäherung an Gleichgewichtslage ohne Sch*
  gung

- Resonanzfall
  BGL:$\ddot{u} + \lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{f}{m} \cos(\gamma t)$
  Lsg: $u(t) = A \cdot e^{-\lambda t} \cos(\omega_D t + \varphi) + b \cdot \cos(\gamma t +$
  mit $b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_o^2 - \gamma^2)^2 4\lambda^2\gamma^2}}$
  und $\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}$
  $\to$ *Erster Term verschwindet. Der zweite („erzw*
  ne“) bleibt übrig.

Arbeit (bei $\lambda \neq 0$):
$A_{\lambda \neq 0} = \frac{f}{2} \cdot b \cdot \gamma\tau \left|\sin(\delta)\right| > 0$
Leistung: $L = \frac{A}{\tau} = \frac{f}{2} \cdot b \cdot \gamma \left|\sin(\delta)\right|$
$\cong \frac{f^2 \lambda}{4m} \frac{1}{\omega_o - \gamma) + \lambda^2}$

3.7 Resonazphänomene

3.7.1 Elektrischer Schwinkreis

DGL: $\ddot{q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \dot{q} + \underbrace{\frac{1}{L \cdot C}}_{\text{Eigenfreq.}} q - \frac{1}{L} \cdot V_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$

Charakteristika	Mech.	Eletr.
Unabh. veränderlche	t	t
Abh. Variable	x	q
Trägheit	m	L
Dämpfung	2λ	$\frac{R}{L}$
Resonanzfrequenz (Eigenfrequenz)	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$
Schwingungsdauer Periode	$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$\tau = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$
Q-Faktor	$\frac{\omega_0}{2\lambda}$	$\frac{\omega_0 \cdot \lambda}{R}$

3.7.2 Spektroskopie

Eigenfrequenz: $\omega_0 = (E_1 - E_0)/\bar{h}$
Plank'sches Wirkungsquantum:
$\bar{h} = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \cdot 10^{-34} kg \cdot m^2/s$
$\Delta E = \bar{h}/\tau$
ΔE Lässt sich aus der Breite des Graphen der Resonanzabsorption ablesen. $\rightarrow$ Streuexperiment

4 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

4.1 Eigenmode zweier gekoppelter harm. Oszilatoren

Aufbau: 2 identische Massen (m), Federn alle mit Federkonstante k.
Wand| $\overset{k}{\leftrightsquigarrow}$ |Masse$_1$| $\overset{k}{\leftrightsquigarrow}$ |Masse$_2$| $\overset{k}{\leftrightsquigarrow}$ |Wand
$m\ddot{u}_1 = -k \cdot u_1 - k \cdot (u_1 - u_2)$
$m\ddot{u}_2 = -k \cdot u_2 - k \cdot (u_2 - u_1)$
Eigenmodensatz: $u_i = a_i \cdot e^{i\omega t}$
Amplituden: a_i
Frequenz: ω
$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Triviale Lösung: $a_1 = a_2 = 0$ (Grundzustand)
Endliche Lösungen gibt es nur wenn die Determinante verschw.$\rightarrow$ Determinantengleichung: $(2k - m < omega^2)^2 - k^2 = 0$
Zwei mögliche Eigenfrequenzen:
$\omega_\alpha^2 = \frac{k}{m} \rightarrow$ Eigenmode= $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Gleichtakt)
$\omega_\beta^2 = \frac{3k}{m} \rightarrow$ Eigenmode= $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Gegentakt)
Eigenmode als Formel:
$u_\alpha(t) = e^{i\omega_\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$u_\beta(t) = e^{i\omega_\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Allg. Lsg:
$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\alpha e^{i\omega\alpha} + c_\beta e^{i\omega\beta} \\ c_\alpha e^{i\omega\alpha} + c_\beta e^{i\omega\beta} \end{pmatrix}$

4.2 Eigenmode einer schwindenden Kette mit N gekoppelten Oszilatoren

Die n-te Masse:
$m\ddot{u} = k[u(n-1) + u(n+1)] - 2ku(n)$
System von n gekoppelten DGL. Ansatz zu Lösung:
$u(n) = a_n \cdot e^{i\omega t}$
$a_i \neq a_j, \quad$ aber: $|a_i| = |a_j|$
Wir können annehmen: $|a_i| = 1$
$\rightarrow a_n = iq \cdot n \cdot a$
chp: $-m < omega^2 = k[e^{-iqa} + e^{iqa} - 2] = 2k[\cos(qa) - 1]$
$\omega(q) = 2\sqrt{k/m} \cdot \sin(qa/2)$
q wird bestimmt durch: $e^{iqNa} = 1$
oder $qNa = p \cdot 2\pi, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

4.3 Wellengleichung

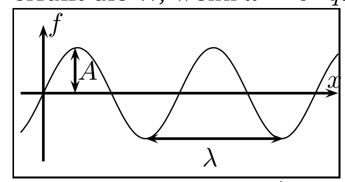
Die homogene Wellengleichung in einer Dimension lautet:
$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
(hierbei ist die Funktion u natürlich zweidimensional, aber üblicherweise wird t hier nicht mitgezählt). Sie hat (nach dem Theorem von D'Alembert) die allgemeine Lösung:
$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$
mit beliebigen zweimal differenzierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Dabei beschreibt der erste Summand eine mit Geschwindigkeit c nach links laufende, der zweite Summand eine mit derselben Geschwindigkeit nach rechts laufende ebene Welle.
$\boxed{\text{Bsp:}}$ Wir betrachten Lösung mit Argment:
$c - d \cdot t = \xi(\frac{\partial}{\partial\alpha} \equiv \partial_\alpha)$

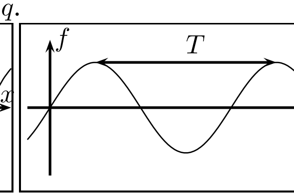
$$\begin{aligned} \partial_t \partial_t f(x - c \cdot t) &= \partial_t \partial_\xi f(\xi) \cdot (-c) \\ &= \partial_\xi \partial_\xi f(\xi) \cdot (c) \cdot (-c) \\ &= c^2 \cdot \partial_\xi \partial_\xi f(\xi) \end{aligned}$$

$\Rightarrow c^2 \cdot \partial_x \partial_x f(x - ct) = c^2 \cdot \partial_\xi \partial_\xi f(\xi)$

4.4 Die harmonische Welle

Die harmonische Welle $f(x,t) = Acdot \cos(q \cdot x -$
erfüllt die W, wenn $\omega = c \cdot q$.





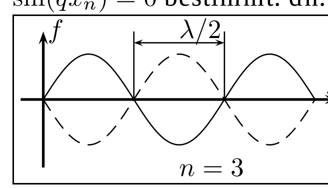
Wellenlänge: $\lambda = 2\phi/q = cT$ (Anzahl Wellentäler
Zeiteinheit)
Periode der Welle: T
Frequenz: $\omega = 2\pi/T$
Ausbreitungsgeschw.: c

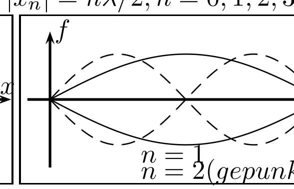
4.5 Stehende Welle

Welle wird irgendwo reflektiert. Die sich überlager
Wellen bilden eine stehende Welle.
Randbedingung muss erfüllt sein: $u(x = 0, t) = u\forall$
stes Ende)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A[\cos(\omega t - qx) - \cos(\omega t + qx)] \\ &= 2A\sin(qx)\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Die Schwingungsknoten sind durch
$\sin(qx_n) = 0$ bestimmt. dh. $|x_n| = n\lambda/2, n = 0, 1, 2, 3$





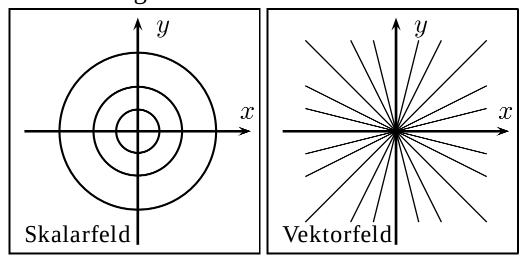
4.6 Eigenfrequenzen eines schwingenden Seils

Hält man das Seil auch noch im Abstand L fest, so erhalten wir eine zusätzliche Randbedingung: $\sin(qL) = 0$
Dies ist nur für bestimmte q's bzw. Wellenlängen möglich: $\lambda_n = 2L/n, n = 1, 2, 3, \ldots$
Das heisst die Welle darf im Gebiet L nur die Frequenzen $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ annehmen.
$\rightarrow$ Grundlage für Musikinstrumente!

5 Mechanik im euklidischen Raum

5.1 Vektoralgebra

- **Skalarprodukt:** $\vec{a}\vec{b} = \sum_i a_i b_i$
- **Betrag eines Vektors:** $\sqrt{\sum_i a_i^2}$
- **Kreuzprodukt:** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$
  $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ wobei φ der von $veca$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist.
  $\vec{c}$ steht senkrecht zu den anderen. ($\rightarrow$ Rechtehandregel)
  $$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$
- **Gradient:** $\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix}$
- **Felder**
  Skalarfelder
  Potentiale o.ä.:
  $\Phi(\vec{r}) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\alpha}{r}$
  Darstellung als Schnitt durch äquipotentialflächen als Höhenlinien.
  Vektorfelder
  Vektorfelder ordnen jedem Punkt im Raum einen Vektor zu.
  Bsp: Gravitationsfeld eines Massepunktes:
  $\vec{K}(\vec{r}) = -m\frac{\vec{r}}{(x^2+y^2+z^2)^{2/3}}$
  Darstellung mittels Feldlinien.



- **Vektorableitung**
  Vektor Komponentenweise ableiten:
  $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$

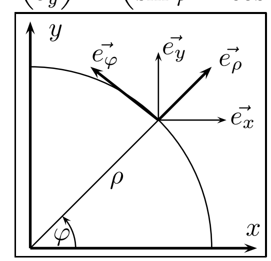
Oft lassen sich Vektorfelder als negativen Gradient eines skalaren Energiefeldes ausdrücken: $\vec{K}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

5.2 Bewegung eines Massenpunktes im Zentralfeld

ein Zentralkraftfeld wird durch eine Potentielle Energie definiert, welche nur dirch den Abstand $|\vec{r}|$ Abhängt: $U = U(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$
Folglich: $\vec{K}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}(\sqrt{x^2+y^2+t^2}) = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
Drehimpuls: $\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$
Drehmoment: $\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\vec{L} = m \cdot \dot{\vec{r}} \times v\dot{e}cr + m \cdot \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$
Da $\vec{L} = L_0\vec{e_z}$ als Vektorprodukt von $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ konstruiert wurde, steht er senkrecht zu diesen beiden Vektoren. $\rightarrow$ Die Bahn eines Teilchens liegt in einer Ebene die senkrecht zu $\vec{L}$ steht. Somit ist die BGL 2-dimensional. Es ist zweckmässig die Polarkoordinaten ρ und φ zu verwenden, sowie deren Einheitsvektoren:

$$x = x(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi$$
$$y = y(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi$$
$$\vec{e_\rho} = \frac{\vec{\rho}}{\rho}$$
$$\vec{e_\varphi} = \frac{\vec{\varphi}}{\varphi}$$

Setzen wir ρ oder φ konstant, und variieren wir je die andere Variable so erhalten wir parametrisierte K dinatenlinien.
Transformationseigenschaften:
$\begin{pmatrix} \vec{e_\rho} \\ \vec{e_\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_x} \\ \vec{e_y} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \vec{e_x} \\ \vec{e_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_\rho} \\ \vec{e_\varphi} \end{pmatrix}$



Daraus folgt:

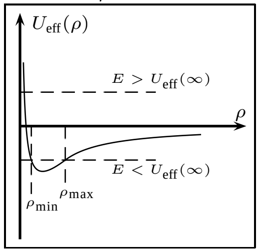
$$\begin{aligned} \vec{e_\rho} &= \rho\vec{e_\rho} \\ \dot{\vec{e_\rho}} &= \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\vec{e_\rho}} = \ldots \\ &= \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} \end{aligned}$$

Beschleunigung:
$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi}$
BGL:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{\rho}} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi} \\ &= K_r\rho(\rho)\vec{e_\rho} + 0 \cdot \vec{e\varphi} \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich 2 DGL:
$m\ddot{\vec{\rho}} = K_\rho(\rho) + \rho\dot{\varphi}^2$

$(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0$
Radialgleichung ($arphi$ wurde durch L ausgedrückt!):
$m\ddot{\rho} = \frac{L^2}{m\rho^2} + K_\rho(\rho) = \frac{L^2}{m\rho^2} - U'(\rho) = \frac{dU_{\text{eff}}}{d\rho}$



Ein weiteres Integral der Bewegung, die totale Energie:
$\dot{\rho} = \sqrt{frac2m(E - U_{\text{eff}}(\rho))}$
Lsg (durch Integrieren):
$t(\rho) = t(\rho_0) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{frac2m(E - U_{\text{eff}}(\rho))}}$
Falls U_{eff} ein lokales Minima besitzt, kann es „gebundene Bahnen" geben. Durch die Gleichung $E - U_{\text{eff}}(\rho)$ werden die Bahnen charakterisiert. An den kritischen Punkten ist die radiale Geschwindigkeit genau 0. Das heisst es ist ein Wendepunkt. Es gibt nun zwei Unterscheidungen:

- $E > U_{\text{eff}}(\infty)$
  $\exists \rho_m in$, ein innerer Radius. Teilchen kommt von weit weg, bis auf den inneren Kreis, fliegt um das Zentrum und fliegt wieder weg.

- $E < U_{\text{eff}}(\infty)$
  $\exists \rho_m in, \rho_m ax$ 2 Kreise jeweils bei $\rho_m in$ und $\rho_m ax$ und das Teilchen kreist zwischen den beiden.
  Ist nun $U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho}$ oder $\alpha\rho^2$ so ist es eine geschlossene Bahn, ansonsten eine Rosettenbahn.

6 Elektrostatik

Elementarladung eines Llektrons / Protons:
$1.6 \cdot 10^{-19} C (C : \text{Coulomb})$
Coulomb-Kraft (Kraft einer Ladung q' auf q):
$\vec{K}_{q' \to q}(\vec{r'}, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q' \cdot q}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$

$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} V s A^{-1} m^{-1}$
Superpositionsprinzip: N Ladungen wirken als makroskopische Ladungsveteilung eine Kraft aus auf q:
$\vec{K}_{\vec{r}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \cdot (\vec{r} - \vec{r_i})}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}$