Analysis I & II

Zusammenfassung

Raphael Theiler
rtheiler@ee.ethz.ch

1 Wichtiges

- Mitternachtsformel:
  $ax^2 + bx + c = 0$
  $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

-

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot(x)$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$ (r= Radius vom Umkreis)
- Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$

1.1 Partialbruchzerlegung

- Gleichung:
  $\frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{A}{x}\frac{B}{1-x}\frac{C}{1+x}$
- Beide Seiten mit Nenner multipliziren:// $1 = A(1-x^2) + B(x+x^2) + C(x-x^2)$
- Ausmultiplizieren:// $1 = A - Ax^2 + Bx + Bx^2 + Cx - Cx^2 = 0$
- Koeffizientenvergleich:
  $Ax^2 + Bx^2 - Cx^2 = 0 \cdot x^2$
  $Bx + Cx = 0 \cdot x$
  $a = 1$
- Aufslösen:
  $B = -C$
  $-C - C - 1 = 0$
  $C = -1/2$
  $B = 1/2$

2 Funktionen

$f : A \to B$
surjektiv: $\forall\, b\in B \quad \exists\, a\in A \Rightarrow f(a) = b$
injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
beides $\to$ bijektiv $\Rightarrow$ umkehrbar $\Rightarrow f^{-1}$ wieder bijektiv

2.1 Stetigkeit

$\forall\varepsilon\exists\sigma \geq 0$
$sodass\, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
$\forall x\ mit\ |x - x_0| < \sigma$
Zeige:
$|f(x) - f(x_0)| \leq\ \dots\ \leq |x - x_0|$

2.2 Zwischenwertsatz

Sei f stetig, $f(x_1) = a, f(x_2) = b$
$\to$ Jeder Wert auf dem Interval $[a, b]$ wird angenommen.
Bsp:
Sei $f(x)$ stetig und $[0, 1] \to [0, 1]$
$f(x) = x$ ist ein Fixpunkt
Sei $h(x) = f(x) - x$
$h(0) = f(0) - 0 = 0$
$h(1) = f(1) - 1 \leq 0$
h stetig $\to$ dh. NST wird angenommen $\to \exists$ Fixpunkt x

2.3 Grenzwerte

$f(a^-) = f(a^+) \to f$ in a stetig

2.3.1 Bestimmen

- Kann ich einsetzen?
- ausmultiplizieren + kürzen
- Bernoulli / de l'Hopital
- Potenzreihen / Taylor

2.3.2 Standard-Grenzwerte

$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$
$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$
$\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

2.3.3 Potenzreihen

- Trigonometrie:
  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$
  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$
  $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots + \frac{2^{2n}\cdot(2^{2n}-1)}{(2n)!} \cdot B_{2n} \cdot x^{2n-1} + \dots$ für $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
- Wurzel:
  $\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \pm \cdots$
  für $-1 < x < 1$

- Exponential:
  $e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
- Logarythmus:
  $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots$
- Hyperbelfunktionen:
  $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$
  $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$
  $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + ... +$
  $+(-1)^{n-1} \cdot \frac{2^{2n} \cdot (2^{2n}-1)}{(2n)!} \cdot B_{2n} \cdot x^{2n-1} + ...$
  für $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

2.3.4 Sonstige Tipps

$x^x = e^{x \ln x}$
$(= 1 + x \ln x + o(x^2)$ bei limes $x \to \infty)$

2.4 Folgen

(... sind eine Liste von Punkten)

- beschränkt: $\exists \eta$ so dass $|a_n| \leq \eta \forall n$
  Bsp: $a_n = sin(\frac{\pi n}{3}) \to -1 \leq a_n \leq 1$
- monoton wachsend / fallend:
  $a_n \overset{<}{>} a_{n+1} \forall n$
  Bsp (fallend): $a_n = ln(n) < ln(n+1) = a_{n+1}$
- begrenzt: $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert

2.5 Reihen

Summe von Werten ($\sum_{k=0}^{\infty} a_k$)

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergiert falls $a_k \to 0$
- Absolut konvergent: falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert
- $|a_k| \leq c \cdot q^k$
  $c > 0$
  $q < 1$
  $\forall k > k_0$
  Falls dies gilt $\to$ konvergent
- absolut konvergent:
  $|a_k| \leq \frac{c}{k^{1+\delta}}$
  $c > 0$
  $\delta > 0$
  $\forall k > k_0$
- $\to$ siehe Potenzreihen

2.6 Potenzreihen

$\sum_{n=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$
$\approx$ Funktion von x
$f(0) = a_0$
Konvergenzradius:
$|x| < \varrho \to$ absolut konvergent
$|x| < \varrho \to$ divergent
$\varrho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+}} \right| \leq \infty$
$\frac{1}{\varrho} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$
Nice to know:
$f'(x) = \frac{k \cdot x^{k-1}}{k^2 - k}$ wenn $x \leq \varrho$
$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$

3 Differentialrechnung

Differentialqiuotient: $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

3.1 Ableitungsregeln

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(fgh))' = f'(gh) + fg'h + fgh'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

3.2 Standardableitungen

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(c)' = 0$
- $(cx)' = c$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(x^s)' = sx^{s-1}$
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = (\ln a)a^x$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

3.3 Maxima / Minima

- Min/Max: $[0,1] \rightarrow min = 0, max = 1$
- Inf/Sup: $(0,1) \rightarrow inf = 0, sup = 1$
  (Grenzwerte gehören nicht mehr zum Bereich)
- globale Max/min: $f'(x_0) \stackrel{!}{=} 0$
  $f(x) : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
  Kanditaten: $f(x_0), f(a), f(b)$
  $\rightarrow$ Rand nicht vergessen

3.4 Mittelwertsatz

$->$ Bilder

3.4.1 Monoton

$f' > 0$ stetig monoton wachsend
$f' < 0$ stetig monoton fallend
$\rightarrow$ Bilder: See: konkav, Berg Konvex

3.5 Taylor

$j_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$
Die n-te Tylor-Entwicklung von $f(x)$ an der Stelle a
$f(x) = j_a^n + \underset{\text{(Fehler)}}{R_n(x)}$
$Rn(x) = \frac{f^{n-1}(\tau)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \tau \in [a,x]$

3.6 Newton-Verfahren

$\rightarrow$ Bild!
$f(x_n) = (x_n - x_{n+1})f'(x_n)$
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

4 Differentialgleichungen

4.1 1. Ordnung

$y' = f(x,y)$
Ordnung: Dimension des Lösungsraumes

4.2 lin. hom. 1. Ordnung

$y' - p(x) \cdot y = 0$
$\rightarrow \; y(x) = ce^{P(x)}$
$P(x) =$ Stammfunktion von $p(x)$
Bsp: $y' = 2xy \quad y(0) = 4$
$y(x) = e^{x^2}$ AB: $4 = ce^0 = c \Rightarrow y(x) = 4e^{x^2}$

4.3 lin. 1. Ordnung mit inhomogenität

$y' = p(x) \cdot y + q(x)$
$y_{part} =$ Partikuläre Lsg der inh. DGL
$y_{hom} =$ Homogene Lsg der inh. DGL
$\begin{pmatrix} y'_{part} \\ y'_{hom} \end{pmatrix} - p(x) \begin{pmatrix} y_{part} \\ y_{hom} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(x) \\ 0 \end{pmatrix}$
Lösung: $y = y_{hom} + y_{part}$

4.4 Variation der Konstanten

$y_{part}(x) = C(x) \cdot y_{hom}(x)$
$y'_{part}(x) = C'(x) \cdot y_{hom}(x) + C(x) \cdot y'_{hom}(x)$ Bsp:
$y' = 2xy + 3x$
$y_p = c(x) \cdot e^{x^2}$
$y'_p = c'(x)e^{x^2} + c(x) \cdot 2xe^{x^2}$
$c'(x)e^{x^2} + c2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} + 3x$
$c'(x) = 3xe^{-x^2}$
$c = d \cdot e^{-x^2}$
$c' = -d \cdot 2xe^{-x^2} - 3xe^{-x^2}$
$d = \frac{-3}{2}$
$c(x) = \frac{-3}{2}e^{-x^2}$

$y_{part} = -\frac{3}{2}e^{-x^2} \cdot e^{x^2} = -\frac{3}{2}$
$y_{alg} = \underbrace{-\frac{3}{2}}_{y_{part}} + \underbrace{C \cdot ex^2}_{y_{hom}}$

4.5 Separierbare DGL

$y' = g(x) \cdot k(y)$
$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot k(y)$
$\frac{1}{k(y)}dy = g(x)dx$
$\int \frac{dy}{dx} = \int g(x) \cdot k(y) \quad + C$
auflösen nach $y = ...$
Oft wird eine DGL durch **Substitution** separierbar!
Bsp:
$\dot{x} = tx(1-x^2) \quad x(0) = 1/2$
$\frac{dx}{dt} = t(x - x^3)$
$\frac{1}{x-x^3}dx = tdt$
$\int \frac{1}{x-x^3}dx = \int tdt$
$\rightarrow$Partialbruchzerlegung
$\int \frac{1}{x} + \int \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \int \frac{-\frac{1}{2}}{1-x} = \frac{1}{2}t^2 \quad + C$
$\underbrace{\ln x}_{\frac{1}{2}\ln x^2} - \frac{1}{2}\ln 1 - x - \frac{1}{2}\ln 1 + x = \frac{1}{2}t^2 \quad + C$
$\frac{1}{2}ln\frac{x^2}{1-x^2} = C + \frac{t^2}{2}$
$\frac{x^2}{1x^2} = d \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$
AB: $\frac{1/4}{1-1/4} = d \cdot 1 = \frac{1}{3}$
Nach x auflösen:
$x = \sqrt{\frac{e^{t^2}}{3+e^{t^2}}}$

4.6 Lin. Hom. DGL, konstante Koeff.

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$
Ansatz: überführt DGL in algebr. Gleichung:
$y(t) = e^{\lambda t}$
$y^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t} = \lambda^n \cdot y$
$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$
$y_{allg} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}$

C_i: frei wählbare Koeff.($\rightarrow$ ABs)
Falls mehere λ_k identisch sind:
$e^{\lambda_k t}, t \cdot e^{\lambda_k t}, t^2 e^{\lambda_k t}$
Bsp:
$y'' + 2y' + y = 0$ AB: $y(0) = 1, y'(0) = 0$
$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
$(\lambda + 1)^2 = 0$
$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-1}$

4.7 $\rightarrow$ mit inhom. Teil

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = k(t)$
$y_{allg} = y_{hom} + y_{part}$
$y_{allg} = C_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t} + y_{part}(t)$
Blatter-Script Seite 255

$K(t)$	Ansatz für $y_p(t)$
t^r	$A_0 + A_1 t + \ldots + A_r t^r$
$b_0 + b_1 t + \ldots + b_r t^r, b_i \in \mathbb{R}$	$A_0 + A_1 t + \ldots + A_r t^r$
$e^{\lambda_0 t}, \lambda_0 \in \mathbb{C}$	$A e^{\lambda_0 t}$
$\cos(\omega t), \sin(\omega t)$	$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$
doppelte NST	$t(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$
$t^2 e^{-t}$	$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) e^{-t}$

Allgemein: Ansatz von „analoger Form“ aber „allgemeiner“ wie $K(t)$
Alternative: „Variation der Konstanten“
Doppelte NST $\rightarrow$ mit t multiplizieren

5 Integralrechnung

$$\sum \longrightarrow \int$$

Bild!
$\lim\limits_{a_{k+1} \rightarrow a_k} \sum (a_{k+1} - a_k) \cdot f(a_k)$

5.1 Regeln

- $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$
- $\int \alpha f = \alpha \int f$
- $\int\limits_{B_1 \cup B_2} f = \int\limits_{B_1} f + \int\limits_{B_2} f$, falls $B_1 \cap B_2 \neq 0$
- $\int\limits_B 1 =$ Volumen von B
- $\left| \int\limits_B f(x) dx \right| \leq M \cdot Vol(B) \quad \exists \epsilon, \int\limits_B f(x) = f(\epsilon) \cdot Vol(b)$
  $M \geq |f(x)|$
- $\boxed{\text{Haupsatz: } \frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t) dt = f(x)}$
- $\int\limits_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(t)|_a^b$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x))$
- $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^3}{4} + \frac{x^7}{9} dx = 0 \rightarrow$Gerade / Ungerade Funktionen!
- $\boxed{\text{Partielle Integration: } \int\limits_a^b u \cdot v' = u \cdot v|_a^b - \int\limits_a^b u' v}$
- $\boxed{\text{Substitution:}}$(Bsp)

$\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$
$\rightarrow t = e^x, x = \ln(t), \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, dx = \frac{1}{t} dt$
$= \int \frac{\frac{1}{t} dt}{\sqrt{1+t}}$
$\rightarrow t = u^2 - 1, dt = 2u du, u = \sqrt{1+t}$
$= 2 \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u^2-1} 2u du$
$= 2 \int \frac{1}{u^2-1}$
$= 2 \int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}$
$= 2 \ln(u-1) - \ln(u+1)$
$= 2 \ln(\frac{u-1}{u+1})$
Rücksubstitution:
$= 2 \ln(\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1}) \quad + C$
$= 2 \ln(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}) \quad + C$
Wichtiges Bsp:
$\int \sinh(x) \cdot \sin(x) dx$
$= \cosh(x) \sin(x) - \int \cosh(x) \cdot (cos(x) dx$
$= \cosh(x) \sin(x) - \sinh(x) \cos(x) - \int \sinh(x) \sin(x) dx$
$\Rightarrow 2 \int \sinh(x) \sin(x) dx = \cosh(x) \sin(x) - \sinh(x) \cos(x)$
$\Rightarrow \int \sinh(x) \sin(x) dx = \frac{1}{2}(\cosh(x) \sin(x) - \sinh(x) \cos(x))$

5.2 Konvergenzverhalten

$|f(t)| \leq \frac{c}{t^\alpha} \quad \alpha > 1$ ab gewissen t_0 $\forall t > t_0$
$\rightarrow \int\limits_a^\infty f(t)$ konvergent
$|f(t)| \geq \frac{c}{t^\alpha}$
$\rightarrow \int\limits_a^\infty f(t)$ divergent
$|g(t)| \leq \frac{c}{t^\beta} \rightarrow \beta = 1 \rightarrow \int\limits_0^b g(t)$ konvergent
$|g(t)| \geq \frac{c}{t^\beta} \rightarrow \beta = 1 \rightarrow \int\limits_0^b g(t)$ divergent
$\rightarrow$ Abschätzen!

6 Mehrfache Integrale

$\int\limits_B f(u,v) \mathrm{d}\mu A = \int\limits_a^b \int\limits_{u_1(v)}^{u_2(v)} f(u,v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$
Wenn Fläche Parametriesiert (zb. Kugelfläche):
$\int\limits_B f(x,y) \mathrm{d}\mu A = \int\limits_{\tilde{B}} \int \tilde{f}(u,v) \cdot |J| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v$

6.1 Versch. Jakobi-Det.

- Kugelkoordinaten
  $$\vec{x} = x(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} R \sin\varphi \cos\vartheta \\ R \cos\varphi \cos\vartheta \\ R \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$\vec{x_\varphi} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ -R\sin\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{x_\vartheta} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ -R\cos\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$

$\boxed{|J| = |\vec{x_\varphi} \times \vec{x_\vartheta}| = R^2\cos\vartheta}$

- Zylinderkoordinaten

$J = \begin{pmatrix} r\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{|J| = \cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r}$

7 Mehrdimensionale Diffrechnung

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Richtungsableitung: $D_{\vec{e}}f = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(\vec{x_0}+t\vec{e})-f(\vec{x_0}}{t}$
Partielle Ableitung:
Gradient: $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ Zeigt in die Richtung des grössten Zuwachses.
$D_{\vec{e}}f(x_0) = \vec{\nabla}f(x_0)\cdot\vec{e}$

7.1 Taylor (mehrdimensional)

$f(\overbrace{\vec{x_0}}^{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}} + \overbrace{\triangle\vec{x}}^{\begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \end{pmatrix}}) = f(\vec{x_0} +$
$+ \underbrace{\nabla f(\vec{x_0})\cdot \triangle\vec{x}}_{\text{1.Ordnung}} +$
$+ \underbrace{\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\triangle x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\triangle y)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\triangle x\cdot\triangle y)^2\right]}_{\text{2. Ordnung}} +$
$+ \underbrace{\frac{1}{3!}[\ldots]}_{\text{3. Ordnung}}$

7.2 Minima & Maxima

Kritische Punkte: $\nabla f = 0$
Hessematrix: $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$
$\det(H) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$
$det > 0$: positiv definit, lokales Minima
$det < 0$: negativ definit, lokales Maxima
- : indefinit, lok. Sattelpunkt

$\boxed{\text{Bsp:}}$
Min. Abstand zwischen Ebene $z = xy + 1$ und dem Nullpunkt $(0,0,0)$.
$d(x,y,z|\vec{0}) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
bei $x^2+y^2+z^2$ die Ebene „einsetzen“: $f(x,y) = x^2+y^2+\underbrace{x^2y^2+2xy+1}_{z^2}$
$f_x = 2x + 2xy^2 + 2y \stackrel{!}{=} 0$
$f_y = 2y + 2yx^2 + 2x \stackrel{!}{=} 0$
$f_{xx} = 2 + 2y^2$
$f_{xy} = 4xy + 2$
$f_{yy} = 2 + 2x^2$
$\Rightarrow x = y$
$\Rightarrow 4x + 2x^3 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$
$\Rightarrow x = y = 0, z = xy + 1 = 1$
Punkt: $(0,0,1)$

7.3 Implizit definierte Funktionen

$L := \{(x,y)\in\mathbb{R}|g(x,y) = 0\}$
$\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ (Problematisch bei Kreisfiguren, etc)
übliche Fragestellung: Definiert $g(x,y) = 0$ an der Stelle $y(a) = b$ eine Funktion?

1. $x = a, y = b, \quad g(a,b) = 0$
2. $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{a,b} =? \neq 0$

Man kann $y'(x)$ ausrechnen ohne aufzulosen:
$y'(x) = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_{x,y}$, weil Kurve $\perp \nabla g$

7.4 Vektorfelder

Jedem Punkt wird ein Vektor angehängt. $\vec{f}(x,y,z)$
Integral „uber ein Vektorfeld entland des Weges γ:
$\int_a^b \vec{K}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}}_{\gamma} dt$
$(\vec{K}\cdot\vec{\gamma}) \to$ Skalarprodukt
$\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x(t),y(t),z(t)) \\ Q(x(t),y(t),z(t)) \\ R(x(t),y(t),z(t)) \end{pmatrix}$

7.5 Gradientenfeld

$K = -\nabla f$
$\oint\vec{K} = \oint -\nabla f = 0$
$= f(a) - f(b) = 0$, bei $a = b$

7.6 Ebene: Green

$\int\limits_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint\limits_{\partial S}(f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y)$
rot $K = Q_x - P_y$

7.7 Fluss in 2D

$\int_a^b \underbrace{P(x(t),y(t),z(t))\cdot\dot{y}(t) - Q(x(t),y(t),z(t))\cdot\dot{x}(t)}_{<\vec{n};\vec{K}>} dt$
$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
$\dot{\gamma}_\perp = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$

$\oint\limits_B \vec{K} \cdot \vec{n}\, ds = \int\limits_B \underbrace{divK}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{K}=P_x+Q_y+R_z} dA$

$\boxed{\text{div}\,\vec{K} = \vec{\nabla} \cdot \vec{K} = P_x + Q_y + r_z}$

7.8 Fluss durch Fläche (3D)

$\int\limits_B \vec{K} = \langle f_u, f_v \rangle\, dudv$

normale: $\frac{\langle f_u, f_v \rangle}{|\langle f_u, f_v \rangle|}$

$|J| = \langle f_u, f_v \rangle$

$\int\limits_B \vec{K} \cdot \frac{\langle f_u, f_v \rangle}{|\langle f_u, f_v \rangle|} \cdot |\langle f_u, f_v \rangle| dudv$

Gauss

$\int\limits_V \text{div}\,\vec{F}\, \text{d}V = \oint\limits_{\partial V} \vec{F} \cdot \text{d}\vec{A}$

7.9 Stokes

$\int\limits_{\partial S} \vec{K} d\vec{s} = \int\limits_S \text{rot}\,\vec{K} \cdot d\vec{\omega}$

$\int \text{rot}\,\vec{K} \underbrace{\langle f_u, f_v \rangle}_{\vec{n}} dudv$

Orietierung beachten!

Bsp:

$f = \begin{pmatrix} y \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix} = \vec{K} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$

Fluss durch Dreieck mit den Koordinaten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$:

$\text{rot}\,\vec{K} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2x \\ z-1 \end{pmatrix}$

$g(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g_\lambda = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ g_\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\langle g_\lambda, g_\mu \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda + \mu = 1$

$x = 1 - \lambda - \mu$

$y = \dots$

$z = \mu$

$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-\mu} \begin{pmatrix} -x \\ -2x \\ z-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda d\mu$

$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-\mu} -4 + 3\lambda + 4\mu d\lambda d\mu = \int\limits_0^1 -4\lambda + \frac{3}{2}\lambda^2 + \lambda\mu\Big|_0^{1-\mu} d\mu$

$= \frac{-5}{2}\mu + \frac{5}{2}\mu^2 - \frac{5}{6}\mu^2\Big|_0^1 = \frac{-5}{6}$

8 Vektorrechnung

8.1 Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

8.2 Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

8.3 Norm

$$\left\| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}$$

8.4 Normalenvektor

2 Vektoren in einer Ebene: $\vec{a}$, $\vec{b}$

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \frac{1}{\underbrace{|\vec{a} \times \vec{b}|}_{\text{Normierung}}}$

8.5 Potentialfeld

$\vec{V}$ ist ein Potentialfeld $\Leftrightarrow$ rot $\vec{V} = 0$

Potential: $\nabla\varphi = \vec{V}$

φ ist ein Skalarfeld. Wenn dieses abgeleitet wird erhält man *immer* ein Vektorfeld. Aber: Nicht jedes Vektorfeld hat ein Potentialfeld.

8.6 Linienintegral

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt$$

8.7 Rotation

$$\text{rot}\,K = \text{rot} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$$

8.8 Divergenz

$$\text{div}\,\vec{K} = \vec{\nabla} \cdot \vec{K} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = P_x + Q_y + rR_z$$

8.9 Normale auf Ellipsoid

Ellipsoid: $F(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\vartheta\cos\varphi \\ b\cos\vartheta\sin\varphi \\ c\sin\vartheta \end{pmatrix}$

$\delta F = \begin{pmatrix} a\sin\vartheta\cos\varphi & -a\cos\vartheta\sin\varphi \\ -b\sin\vartheta\sin\varphi & b\cos\vartheta\cos\varphi \\ c\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = F_\vartheta \times F_\varphi = \begin{pmatrix} -bc\cos^2\vartheta\cos\varphi \\ -ac\cos^2\vartheta\sin\varphi \\ -ab\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix} = -\cos\vartheta \cdot \begin{pmatrix} \frac{bc}{a}\cdot x \\ \frac{ac}{b}\cdot y \\ \frac{bb}{c}\cdot z \end{pmatrix}$

Alternativ: Ellipsoid gegeben als $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(x, y, z) \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{xz^2}{c^2}$ Ellipsoid ist Niveaufläche von f zum Niveau 1. $\vec{\nabla} f \perp t_p$

$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix}$