Analysis III

Zusammenfassung

Raphael Theiler
rtheiler@ee.ethz.ch

1 Klassifizierung von PDEs

Die Ordnung einer PDE ist als die höchste auftretende Ableitung definiert.
Typen von PDEs:

1.1 Einteilung der PDEs

- **lineare PDE:** Jeder Summand enthält u oder partielle Ableitungen von u.
  Bsp: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \triangle u, au_t + bu_x = 0$
  Bsp: $y \cdot u_{xx} + 2xy \cdot u_{yy} + u = 1$
- **quasilineare PDE:** Die koeffizienten von u oder von den partiellen Ableitungen von u hängen von unabhängigen Variablen oder von u ab, jedoch nicht von partiellen ableitungen von u.
  Bsp: $y \cdot \underline{u_{xx}} + 2xu \cdot u_{yy} + u = \sin y$
- general form of linear PDEs of **2nd order**:
  $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} \cdot u_{x_i,x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} B_i \cdot u_{x_i} + F \cdot u = G$
- A PDE is **homogenous** if $G = 0$
- **Nichtlineare PDEs:** Alle übrigen PDEs

1.2 Einteilung der Rand- und Nebenbedingungen

Analog unterscheidet man homogene lineare, inhomogene lineare und nichtlineare Anfangs- und Randbedingungen.

- Dirichlet-Randdaten: Vorgabe von Werten auf dem Rand
- Neumann-Randdaten: Vorgabe der Normalenableitung

1.3 Klassifikation von lin. PDEs 2. Ordnung

Allgemeine Form einer linearen PDE 2. Ordnung:
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$
mit symmetrischen Koeffizienten $a_{ij} = a_{ji}$
(Symmetrisierung: $\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$)

$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ Klassifizierung: $\rightarrow$ Eigenwerte λ_i bestimmen:

- **elliptisch:** $\lambda_i > 0 \forall i$ oder $\lambda_i < 0 \forall i$
  Bsp: $\triangle u = 0$ (Laplace-Gleichung)
  Bsp: $\triangle u = f$ (Poisson-Gleichung)
- **hyperbolisch:** Alle $\lambda_i \neq 0$ und nicht alle λ_i das selbe Vorzeichen
  Bsp: $u_{tt} = c^2 \triangle u$ (Wellengleichung)
- **parabolisch:** $\lambda_i = 0$ für *exakt* ein i und der Eigenvektor $\vec{v}_i$ muss so sein dass $v_i \cdot \vec{B} \neq 0$
  $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix}$ Vektor der Terme erster Ordnung
  und alle Eigenwerte müssen das selbe Vorzeichen haben.
  Bsp: $u_t = a^2 \triangle u$ (Wärmeleitungsgleichung)
- Alles andere: **underterminate**

1.4 PDEs mit 2 Variablen

$au_{xx} + bu_{xy} + vu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0$

- $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ elliptic
- $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ hyperbolic
- $b^2 - 4ac = 0$ *and* $2cd \neq be \Rightarrow$ parabolic
- otherwise: degenerate

2 Lösungsmethoden für PDEs

2.1 Separation / Trennung der Variablen

$u_t = u_{xx}$
We say: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$(Separation)
$\Rightarrow X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$
$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = konst. = k$
$\Rightarrow T' = kT$
$T(t) = e^{kt}$
and the same for$X(x)$
$\Rightarrow X'' = kX$
depending on k we get 3 cases
$k = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$
$k = \omega^2 \Rightarrow X(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$
$k = -\omega^2 \Rightarrow X(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$
Laplacegleichung:
$\triangle u = X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$
$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{F(x)} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{G(y)} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{H(z)} = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$
$F(x) = \alpha$:
Weil: $\frac{d}{dx}(F(x) + G(y) + H(z) = \frac{d}{dx}F(x) = 0$
Integrieren: $\Rightarrow F(x) = \alpha = const.$
So erhalten wir 3 Unabh. ODE

- Zum lösen der ODE mit homogenen RB beginnnen
- Fallunterscheidung für die Konst. ($< 0, = 0, > 0$)
  $\Rightarrow$ die Triviale Lösung $u = 0$ interessiert uns nicht.

2.2 Separation bei Inhomogenitäten

2.2.1 Superposition & Fourrierreihe:

- Problem:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + b \\ u(0,t) = u(L,t)) = 0 \\ u(x,0) = \sin(\frac{\pi x}{L}) \end{cases}$$

- 1. Schritt: $u^*(x)$ bestimmen (Lsg. zum Randwertproblem):
$$\begin{cases} a^2 u^*_{xx} + b = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$$
Dh. $u^*(x) = -\frac{b}{2a^2}(x-L)x$ So dass beide Randbedingungen erfüllt sind.

- Nun setzen wir: $v(x,t) = u(x,t) - u^*(x)$ und erhalten folgendes Gleichungssystem
$$\begin{cases} v_t = u_t = a^2(v_x x + u^*_{xx}) + b = a^2 v_{xx} \\ v(0,t) = v(L,t)) = 0 \\ v(x,0) = \sin(\frac{\pi x}{L}) \end{cases}$$
Wir können nun separieren. $\Rightarrow T'(t) = CT(t)$ und $a^2 X''(x) = CX(x)$
Wie gewohnt 3 fälle:
$C = 0$: ...
$C > 0$: ...
$C = -\lambda^2$: $X(x) = A_1 \sin(\frac{\lambda}{a}x) + A_2 \cos(\frac{\lambda}{a}x)$

- mit Randbedingungen A_1 und A_2 bestimmen.
Merken dass $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi a}{L}$
Bei $X(x)$ und $T(t)$ einsetzen.
$v(x,t) = T(t)X(t) = \sum\limits_{n\geq 1} A_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x)$
Um A_n zu bestimmen erweitern wir u^* $2L$-persiodisch (je nach sin oder cos müssen wir gerade oder ungerade erweitern) zu $\tilde{u}^*(x)$. So können wir nun die A_n als Fourrierkoeefizienten berrechnen:
$A_n = \int\limits_{-L}^{L} \tilde{u}^*(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx$
Resultat bei $u(x,t) = v(x,t) + u^*(x)$ einsetzen.

2.2.2 Superpoistion II

Bei komplizierteren Problemen ist es manchmal nicht möglich alle RB „gleichzeitig“ zu erfüllen. Es ist manchmal hilfreich das Problem zu unterteilen.
Beispiel:
$$\begin{cases} \triangle u = 0 & |x \in (0,a), y \in (0,b) \\ u(x,0) = u(0,y) = 0 & |x \in [0,1], y \in [0,b] \\ u(x,b) = 3\sin(\frac{2\pi k}{a}x) & |x \in [0,a] \\ u(a,y) = 5\sin(\frac{2\pi l}{b}y) & |y \in [0,b] \end{cases}$$
Da wir eine lineare PDE haben benutzen wir folgenden Ansatz:
$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$
Wir erhalten folgende Gleichungen:
$$\begin{cases} \triangle v = 0 \\ v(x,0) = v(0,y) = 0 \\ v(a,y) = 0 \\ v(x,b) = 3\sin(\frac{2\pi k}{a}x) \end{cases}$$
und
$$\begin{cases} \triangle w = 0 \\ w(x,0) = w(0,y) = 0 \\ w(a,y) = 5\sin(\frac{2\pi k}{b}y) \\ w(x,b) = 0 \end{cases}$$
Einzeln lassen sich die Probleme einfach lösen, und dank Superpoistion erhalten wir unsere Lösung.
Beisppiele für Superpositionen:

- $\left.\begin{array}{l} u(0,t) = a(t) \\ u(L,t) = b(t) \end{array}\right\} u(x,t) = \frac{1}{L}[(L-x)a(t) + xb(t)]$

- $\left.\begin{array}{l} u(0,t) = a(t) \\ u_x(L,t) = b(t) \end{array}\right\} u(x,t) = a(t) + xb(t)]$

- $\left.\begin{array}{l} u_x(0,t) = a(t) \\ u_x(L,t) = b(t) \end{array}\right\} u(x,t) = \frac{1}{2L}[(2L-x)a(t) + xb(t)]$

2.2.3 3. Technik

Inhomogenes Problem mit allen(zuvielen) inhomogenen RB, oder AB, welche unabhängig von Variablen (Konstanten) sind.
$\Rightarrow$ Überlagerung mit anderer Funktion, so, dass sich die Bedingungen zzu null summieren. Beispiel: Wärmeleitungsgleichung in Wand
$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & x \in (0,L), t > 0 & (3) \\ u_x(0,t) = u_0, u(L,T) = u_L & t > 0 & (4) \\ u(x,0) = f(x) & & (5) \end{cases}$$
Suche Lösung der Form $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$
$v(x,t)$ muss folgende Bedingungen erfüllen $(3), (4)$
$v_{xx} = 0; v(0) = u_o; v(L) = u_L$ „Steady State“
$w(x,t)$ muss demnach folgende Bedingungen erfüllen:
$$\begin{cases} w_t = Dw_{xx} \\ w(0,t) = 0, w(L,t) = 0 \\ w(x,0) = f(x) - v(x) \end{cases}$$
Dieses Problem kann vergleichsweise einfach gelöst werden.

2.3 Methode der Charakteristiken

Dient zu Lösung einer quasilinearen PDE 1. Ordnung der Form:
$(1) a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$ & Nebenbedingung: $u(x,0) = g(x)$ (oder ähnlich)
Eine Lösung $u(x,y)$ kann als Fläche $Z = u(x,y)$ im $\mathbb{R}^3$ aufgefasst werden. Gleichung der Integralfläche $\varphi(x,y,z) : u(\pounds x, y) - z = 0$
Flächennormale $\vec{n} = \vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}$
Wegen (1) gilt: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = au_x + bu_y - c = 0$
$\Rightarrow$ Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist in **jedem** Punkt tangential zur Inegralfläche.
Charakteristik: Kurve γ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$: $t \mapsto \gamma(t)$ für die gilt:

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(\gamma(t))\\ b(\gamma(t))\\ c(\gamma(t))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(x(t),y(t),z(t))\\ b(x(t),y(t),z(t))\\ c(x(t),y(t),z(t))\end{pmatrix}$$

Falls eine Charakteristik einen Punkt mit der Integralfläche gemeinsam hat, so liegt sie komplett in dieser.
Wir wissen nun wie die Charakteristiken aussehen. Nun passen wir sie den gegebenen Bedingungen an.
Wir parametrisieren die gegebenen Randdaten als Kurve $\Gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$. Anschliessend müssenwir in dem von uns erhaltenen Gleichungssystem die Parameter s und t eliminieren.

Kurz: $a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y = c(x,y,z)$
1. Aufstellen der charakteristischen Gleichungen
2. Parametrisieren der Randdaten
3. Lösen des sich ergebenden Gleichungssystems und Elimination dr Parameter

2.3.1 Vorgehen:

1. Bilde Charakteristisches DGL-System:
   $$\begin{cases}\dot x(r) = a(x,y,u)\\ \dot y(r) = b(x,y,u)\\ \dot u(r) = c(x,y,u)\end{cases}$$
2. Differentialgleichungssystem lösen
3. Alle Konstanten in Abhängigkeit von s setzen
4. Nebenbedingungen erfüllen
   $$\begin{cases}x(0,s) = s\\ y(0,s) = 0\\ u(0,s) = g(s)\end{cases}$$
   (Den Nebenbedingungen anpassen)
5. x und y nach r und s auflösen und bei u einsetzen. $\Rightarrow$ nach u auflösen

2.3.2 Zeichnen der Charakteristiken

- Projektion auf x-y-Ebene: Charakterisiken in Parameterform $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\ at+b\end{pmatrix}$
- Durch Anpassen der Ranbed. fixiert man die Charakteristiken an der Randkurve. zb. $u(x,0) = e^{-x^2}$

2.3.3 Example

$$\begin{cases}xu_x + uu_y - u = 0\\ u(x,0)x^2\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dot x(r) = \frac{dx}{dr} = x(r) \text{ (ODE)}\\ \dot y(r) = \frac{dy}{dr} = u(r) \text{ (ODE)}\\ \dot u(r) = \frac{du}{dr} = u(r) \text{ (ODE)}\end{cases}$$
$\Rightarrow x = Ae^r$ und $u = Ce^r$
$\Rightarrow y = \int u = Ce^r + B$
BC:
$$\begin{cases}x(0,s) = s\\ y(0,s) = 0\\ u(0,s) = s^2\end{cases}$$
Nun nach s und r auflösen und bei $u(r,s)$ einsetzen so dass wir $u(x,y)$ erhalten. $\Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{2}x^2[1+\sqrt{1-f\frac{y}{x^2}}]$

2.4 Wärmeleitungsgleichung

Form: $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t = D \triangle u = Du_{xx}$ mit $D = \frac{k}{\rho c} > 0$ Temperaturleitfähigkeit
Three important properties:

- Maximum principle: The max of u is either earlier in time or at the boundry of the region
- The temperature tends to be smooth
- A solution converges to a stationary one (unless there is an outside source)

Vorgehen:

- Basislösungen finden (Trennung der Variablen)
  Bei inhomogenen PDEs zuerst stationäre Lösung $u^*(x)$ finden und mit $u^*(x) + v(x,t)$ fortfahren
- Auflösen der ODEs (Fallunterscheidung, $k < 0$, $k > 0$, $k = 0$, vorallem Sin- / Cos-Lösungen sind interessant)
- Superposition der Basislösungen um inhomogene Bedingungen zu erfüllen ($\rightarrow$ Fourierreihen)

Mögliche Bedingungen:

- Wärmeleitungsgleichungen
- Periodizitätsbedingungen
- Anfangsbedingungen
- Randbedingungen

2.5 Laplace- /Potentialgleichungen

$\triangle\ u = 0$ Die **Randbedingungen** definieren die Art der Gleichung:

Dirichlet-Problem: $\begin{cases}\triangle\ u = 0 & \text{in } G\\ u(x) = f(x) & \forall x \in \delta G\end{cases}$

Neumann-Problem: $\begin{cases}\triangle\ u = 0 & \text{in } G\\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x) & \forall x \in \delta G\end{cases}$

$\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \operatorname{grad} u$ Ist die Normalenableitung (zeigt vom Rand von G ins Innere) **Lösbarkeit**

D Ist der Rand δG sowie die Randfunktion $f(x)$ genügend glatt, so besitzt das Dirichlet-Problem eine eindeutige Lösung (nach dem Maximumsprinzip)

N Beim Neumann-Problem ist die Existenz einer Lösung an eine zusätzliche Bedingung geknüpft: Für die Randfunktion $g(x)$ muss gelten $\int_{\delta G} g(x)d\sigma = 0$ Zudem gibt es mehrere Lösungen. Wenn $u(x)$ eine Lösung ist, so ist auch $u(x) + c$ eine Lösung.

Vorgehen:

- Basislösungen finden (Trennung der Variablen)
  Bei inhomogenen PDEs zuerst stationäre Lösung $u^*(x)$ finden und mit $u^*(x) + v(x,t)$ fortfahren

- Auflösen der ODEs (Fallunterscheidung, $k < 0$, $k > 0$, $k = 0$, vorallem Sin- / Cos-Lösungen sind interessant)

- Superposition der Basislösungen um inhomogene Bedingungen zu erfüllen ($\rightarrow$ Fourierreihen)

2.5.1 Mittelwertsatz harmonischer Funktionen

Ist G eine Kreisscheibe mit Radius ρ im Definitionsbereich einer harmonischen Funktion u, so ist der Funktionswert $u(x_0, y_0)$ im Zentrum (x_0, y_0) von G gleich dem Mittelwert von u auf δG : $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos t, y_0 + \rho \sin t) dt$

2.5.2 Maximumsprinzip

Nimmt eine harmonische Funktion u im Innern ihres zusammenhängenden Definitionsbereiches G ein Maximum an, so ist u eine Konstante.

2.5.3 Dirichlet-Problem für Kreis / Poisson Kernel

$$\begin{cases} \triangle\ u = 0 & \text{im Kreis-innern} \\ u(R, \varphi) = f(\varphi) & \forall \varphi \end{cases}$$
$\triangle\ u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u\varphi\varphi$
Set $u(r, \varphi) = F(r)G(\varphi)$ (Separation)
$\Rightarrow \frac{r^2 F'' + F'}{F} = -\frac{G''}{G} = k = \pm\omega^2$
Fallunterscheidungen: $k = -\omega^2$, $k = 0$ und $k = \omega^2$.
Für $k = \omega^2$ erhalten wir eine sinnvolle Lösung mithilfe des Poisson-Kernels:
$P_R(r, t - \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t - \varphi) + r^2}$
$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} dt$
Remark: $P_R(0, t - \varphi) = 1$
$u(o, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) dt$ (Der Wert von u im Ursprung ist gleich dem Durchschnitt der Werte von $f(t)$.

2.5.4 Dirichlet-problem for an annulus

$$\begin{cases} \triangle\ u = 0 & \text{im Kreis-innern} \\ u(\rho_1, \varphi) = g(\varphi) & \forall \varphi \\ u(\rho_2, \varphi) = f(\varphi) & \forall \varphi \end{cases}$$
Separate as usual
for the case: $k = \omega^2$ we get:
$u(r, \varphi) = (Cr^{\omega} + Dr^{-\omega})(A\cos(\omega\varphi) + B\sin(\omega\varphi))$
Use bdry.cond. to determine A, B, C and D.

2.6 Poisson-Gleichung

$$\begin{cases} \triangle\ u = f := 4\pi\rho \\ u = g & \text{auf } \delta G \end{cases}$$
Meist lösbar mit Greenscher Funktion
Vorgehen:

- Finde partikuläre Lösung u_0 ($\triangle\ u_0 = f := 4\pi\rho$)

- Setze $u = u_0 + v$ und löse $\begin{cases} \triangle\ v = 0 \\ v = g - u_0 & \text{auf } \delta G \end{cases}$

2.7 Greensche Funktion

Eine Funktion $G(x, y) : B\backslash\{y\} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Greensche Funktion (des Laplace-Operators) bezüglich des Gebietes $B \subset \mathbb{R}''$ falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle $y \in B$ gilt: $\lim\limits_{x_n \rightarrow x} G(x, y) = 0$ Für alle $x \in \partial G$

- Für alle $y \in B$ gilt: $\triangle\ G(x, y) = \delta(y)$

$\left(\text{Erinnerung: } \delta_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \xi \\ 1 & x = \xi \end{cases}\right)$ Hat man für ein gegebenes Gebiet B eine Greensche Funktion gefunden, so hat man damit automatisch das folgende Dirichlet-Problem gelöst: $\begin{cases} \triangle\ u = f & \text{in } B \\ u = 0 & \text{auf } \partial B \end{cases}$
Die Lösung ist gegeben durch: $u(x) = \int\limits_B f(y) G(x, y) dy$

2.7.1 Ex: Green & Heat Eq.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0 = 0 \\ u(0, t = 0 = u(L, t) \end{cases}$$
By def. the Green's function $G(x, t, y, s)$ satisfies the problem:
$$\begin{cases} G_t - G_X X = \delta(x - y, t - s) = \delta(x - y)\delta(t - s) \\ G(x, 0, y, 0) = 0 \\ G(0, t, y, s) = 0 = G(L, t, y, s) \end{cases}$$
First we solve the inhom. problem with separation:
$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v(0, t) = 0 = v(L, t) \end{cases}$$
$\Rightarrow v(x, t) = \sum\limits_{n \geq 1} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 t})$
With use the following Ansatz:
$G(x, t, y, s) = \sum\limits_{n \geq 1} b_n(t, y, s) \sin(\frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 t})$
We need to determine b_n. We do this we expand the inhomogeneous term of our problem as follows:
$\delta(x - y)\delta(t - s) = \sum\limits_{n \geq 1} c_n(t, y, s) \sin(\frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 t})$
$c_n(t, y, s) = \frac{2}{L} \int_0^L \delta(x - y)\delta(t - s) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx = \frac{2}{L}\delta(t - s) \sin(\frac{n\pi y}{L})$
This gives as a new ODE. The solution is:
$b_n(t, y, s) = e^{-(n\pi/L)^2 t} b_n(0, y, s) + \frac{2}{L} H(t - s) \sin(\frac{n\pi y}{L}) e^{(n\pi/L)^2 (s - t)}$
With the bdry.cond. we get:
$G(x, t, y, s) = \frac{2}{L} H(t - s) \sum\limits_{n \geq 1} \sin(\frac{n\pi x}{L}) \sin(\frac{n\pi y}{L}) e^{(n\pi/L)^2 (s - t)}$
$H(z) = \begin{cases} 0 & , z \leq 0 \\ 1 & , z > 0 \end{cases}$ (Heaviside)

2.8 Wellengleichung

Allgemeine homogene Wellengleichung:
$u_{tt} = c^2 \triangle\ u$
$u_{tt} = c^2 u_{xx}$
Anfangsbedingungen: $u(x, 0) = f(x)$ (initial displacement)

$u_t(x,0) = g(x)$ (initial velocity)

2.8.1 d'Alembert Solution

Wenn folgende Bedingungen erfüllt sind darf die Methode von d'Alembert angewandt werden:

- endliches Intervall L
- homogene Dirichlet-Randbedingungen
- Randbedingungen ungerade, $2L$-Persiodisch forgesetzt

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \triangle u & \text{in } G \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Lösung nach d'Alembert: (1-dim.)
$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$
mit AB:
$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\tau)d\tau + \frac{K}{2}$
$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\tau)d\tau - \frac{K}{2}$
$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}$
(vereinf. $x_0 = 0, K = 0$)

1. $g \equiv 0 \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct))$
   Die Lösung besteht aus der Superposition einer nach links und einer nach rechts laufenden Welle.
2. $f \equiv 0 \Rightarrow u(x.t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds = \frac{1}{2}[G(x+ct) - G(x-ct)]$ mit $G(x) := \frac{1}{\int}{}_{x_0}^{x} g(\tau)d\tau$

Auch im Allgemeinen Fall brauchen wir zur Bestimmung von $u(x_0, t_0)$ nur die Funktionswerte im Interval $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ zu kennen um die Lösung vollständig zu bestimmen.

Innerhalb dieses Kegels sind alle Lösungen vollständig durch die Funktionswerte im Intervall $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ bestimmt.

$\boxed{\text{Bsp:}}$ Saite mit einem fixierten Ende (RB: $u(0,t) = 0$)
Für $x > ct$ ist dies dieselbe Lösung wie ohne RB, für x¿ct ergibt sich:
$u(0,t) = \phi(ct) + psi(-ct) \overset{!}{=} 0$
$-\phi(ct) = \psi(-ct) \overset{subst.}{\Leftrightarrow} \psi(x-ct) = -\phi(ct-x)$
Somit haben wir eine volständige Lösung:
$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$ für $x > ct$
$u(x,t) = \phi(x+ct) - \phi(ct-x)$ für $x < ct$
Existenz:

- $u(x,t)$ 2 mal stetig diffbar
- $f(x)$ 2 mal, $g(x)$ einmal stetig diffbar
- Verträglichkeitsbedingungen: Wenn $u(0,t) = 0$ und $u(x,0) = f(x) \overset{x,t \to 0}{\Rightarrow} u(0,0) = f(0)$

2.8.2 Die Schwingungsgleichung

Falls die Bedingungen für d'Alembert nicht erfüllt sind, nimmt man den Seperationsansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$.
Daraus folgt die Schwingungsgleichung oder Helmholtzgleichung $\triangle U + \lambda U = 0$ mit $\lambda := \frac{\omega^2}{c^2} \geq 0$
Basislösung für eine stehende Welle: $u_\lambda(x,t) = U_\lambda(x)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$
Vorgehen:

- Basislösungen finden (Trennung der Variablen)
  Bei inhomogenen PDEs zuerst stationäre Lösung $u^*(x)$ finden und mit $u^*(x) + v(x,t)$ fortfahren
- Auflösen der ODEs (Fallunterscheidung, $k < 0$, $k > 0$, $k = 0$, vorallem Sin- / Cos-Lösungen sind interessant)
- Superposition der Basislösungen um inhomogene Bedingungen zu erfüllen ($\rightarrow$ Fourierreihen)

3 Wichtiges

- Mitternachtsformel:
$ax^2 + bx + c = 0$
$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

-

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot(x)$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$ (r= Radius vom Umkreis)
- Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
- Gerade Funktion $\sin(x) = -\sin(-x)$
- Ungerade Funktion $\cos(x) = \cos(-x)$

3.1 Trigonometrische Identitäten

- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(\alpha)$
- $\sin^3(\alpha) = \frac{1}{4}(3\sin(\alpha) - \sin(3\alpha))$
- $\cos^3(\alpha) = \frac{1}{4}(3\cos(\alpha) - \cos(3\alpha))$
- $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$

3.2 Trigonometrische Summen

- $\sin(alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\sin(alpha) - \sin(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\cos(alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\cos(alpha) - \cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

3.3 Trigonometrische Produkte

- $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

3.4 Hyperbolische Funktionen & Identitäten

- $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
- $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
- $arsinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
- $arcosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh(\alpha)\cosh(\beta) \pm \cosh(\alpha)\sinh(\beta)$
- $\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh(\alpha)\cosh(\beta) \pm \sin(\alpha)\sinh(\beta)$
- $\sinh(2\alpha) = 2\sinh(\alpha)\cosh(\alpha)$
- $\cosh(2\alpha) = \cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha)$

3.5 Ebene Körper

Körper	Umfang U	Fläche A
Gleichs.3eck	$= 3a$	$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Kreis	$= 2\pi r$	$= \pi r^2$
Kreissektor	$= 2r + r\varphi$	$= \frac{1}{2}r^2\varphi$
Kreissegm.	$= r\varphi + 2r\sin(\frac{\varphi}{2})$	$= \frac{1}{2}r^2(\varphi - \sin(\varphi))$

3.6 Räumliche geom. Körper

Körper	Oberfläche A	Volumen V
Würfel	$a = 6a^2$	$V = a^3$
Quader	$A = 2(ab + bc = ac)$	$V = abc$
Pyramide		$V = \frac{1}{3}Ah$
Reg. Tetraeder	$A = a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
Zylinder	$A = 2\pi r(r+h)$	$V = \pi r^2 h$
Kegel	$A = \pi r(r + \sqrt{r^2+h^2})$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Kugel	$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

3.7 Grenzwerte

3.7.1 Standard-Grenzwerte

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$
$\frac{dx^n}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$
$\frac{da^x}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

3.7.2 Potenzreihen

- Trigonometrie:
$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$
$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$
$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + ... + \frac{2^{2n}\cdot(2^{2n}-1)}{(2n)!} \cdot B_{2n} \cdot x^{2n-1} + ...$ für $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

- Wurzel:
$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \pm \cdots$
für $-1 < x < 1$

- Exponential:
  $e^x = \exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
- Logarythmus:
  $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots$
- Hyperbelfunktionen:
  $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$
  $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$
  $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + ...+$
  $+(-1)^{n-1} \cdot \frac{2^{2n} \cdot (2^{2n}-1)}{(2n)!} \cdot B_{2n} \cdot x^{2n-1} + ...$
  für $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

3.7.3 Sonstige Tipps

$x^x = e^{x \ln x}$
$(= 1 + x \ln x + o(x^2)$ bei limes $x \to \infty)$

3.8 Folgen

(... sind eine Liste von Punkten)

- beschränkt: $\exists \eta$ so dass $|a_n| \leq \eta \forall n$
  Bsp: $a_n = sin(\frac{\pi n}{3}) \to -1 \leq a_n \leq 1$
- monoton wachsend / fallend:
  $a_n \overset{<}{>} a_{n+1} \forall n$
  Bsp (fallend): $a_n = ln(n) < ln(n+1) = a_{n+1}$
- begrenzt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert

3.9 Reihen

Summe von Werten ($\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$)

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergiert falls $a_k \to 0$
- Absolut konvergent: falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert
- $|a_k| \leq c \cdot q^k$
  $c > 0$
  $q < 1$
  $\forall k > k_0$
  Falls dies gilt $\to$ konvergent
- absolut konvergent:
  $|a_k| \leq \frac{c}{k^{1+\delta}}$
  $c > 0$
  $\delta > 0$
  $\forall k > k_0$
- $\to$ siehe Potenzreihen

3.10 Potenzreihen

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$
$\approx$ Funktion von x
$f(0) = a_0$
Konvergenzradius:
$|x| < \varrho \to$ absolut konvergent
$|x| < \varrho \to$ divergent
$\varrho = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+}}\right| \leq \infty$
$\frac{1}{\varrho} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$
Nice to know:
$f'(x) = \frac{k \cdot x^{k-1}}{k^2 - k}$ wenn $x \leq \varrho$
$\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$

4 Differentialrechnung

Differentialqiuotient: $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

4.1 Ableitungsregeln

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(fgh))' = f'(gh) + fg'h + fgh'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

4.2 Standardableitungen

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(c)' = 0$
- $(cx)' = c$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(x^s)' = sx^{s-1}$
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = (\ln a)a^x$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4.3 Taylor

$j_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$

Die n-te Tylor-Entwicklung von $f(x)$ an der Stelle a

$f(x) = j_a^n + \underset{\text{(Fehler)}}{R_n(x)}$

$Rn(x) = \frac{f^{n-1}(\tau)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \tau \in [a,x]$

4.4 Mehrdimensionale Diffrechnung

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Richtungsableitung: $D_{\vec{e}} f = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x_0}+t\vec{e})-f(\vec{x_0}}{t}$

Partielle Ableitung:

Gradient: $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ Zeigt in die Richtung des grössten Zuwachses.

$D_{\vec{e}} f(x_0) = \vec{\nabla} f(x_0) \cdot \vec{e}$

4.4.1 Taylor (mehrdimensional)

$f(\overbrace{\vec{x_0}}^{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}} + \overbrace{\triangle \vec{x}}^{\begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \end{pmatrix}}) = f(\vec{x_0} +$

$+ \underbrace{\nabla f(\vec{x_0}) \cdot \triangle \vec{x}}_{\text{1.Ordnung}} +$

$+ \underbrace{\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\triangle x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\triangle y)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\triangle x \cdot \triangle y)^2\right]}_{\text{2. Ordnung}} +$

$+ \underbrace{\frac{1}{3!}[\ldots]}_{\text{3. Ordnung}}$

5 Differentialgleichungen

5.1 1. Ordnung

$y' = f(x,y)$

Ordnung: Dimension des Lösungsraumes

5.2 lin. hom. 1. Ordnung

$y' - p(x) \cdot y = 0$

$\to \ y(x) = ce^{P(x)}$

$P(x) =$ Stammfunktion von $p(x)$

Bsp: $y' = 2xy \quad y(0) = 4$

$y(x) = e^{x^2}$ AB: $4 = ce^0 = c \Rightarrow y(x) = 4e^{x^2}$

5.3 lin. 1. Ordnung mit inhomogenität

$y' = p(x) \cdot y + q(x)$

$y_{part} =$ Partikuläre Lsg der inh. DGL

$y_{hom} =$ Homogene Lsg der inh. DGL

$\begin{pmatrix} y'_{part} \\ y'_{hom} \end{pmatrix} - p(x)\begin{pmatrix} y_{part} \\ y_{hom} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(x) \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung: $y = y_{hom} + y_{part}$

5.4 Variation der Konstanten

$y_{part}(x) = C(x) \cdot y_{hom}(x)$

$y'_{part}(x) = C'(x) \cdot y_{hom}(x) + C(x) \cdot y'_{hom}(x)$ Bsp:

$y' = 2xy + 3x$

$y_p = c(x) \cdot e^{x^2}$

$y'_p = c'(x)e^{x^2} + c(x) \cdot 2xe^{x^2}$

$c'(x)e^{x^2} + c2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} + 3x$

$c'(x) = 3xe^{-x^2}$

$c = d \cdot e^{-x^2}$

$c' = -d \cdot 2xe^{-x^2} - 3xe^{-x^2}$

$d = \frac{-3}{2}$

$c(x) = \frac{-3}{2}e^{-x^2}$

$y_{part} = -\frac{3}{2}e^{-x^2} \cdot e^{x^2} = -\frac{3}{2}$

$y_{alg} = \underbrace{-\frac{3}{2}}_{y_{part}} + \underbrace{C \cdot ex^2}_{y_{hom}}$

5.5 Separierbare DGL

$y' = g(x) \cdot k(y)$

$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot k(y)$

$\frac{1}{k(y)}dy = g(x)dy$

$\int \frac{dy}{dx} = \int g(x) \cdot k(y) \quad + C$

auflösen nach $y = ...$

Oft wird eine DGL durch **Substitution** separierbar!

Bsp:

$\dot{x} = tx(1-x^2) \quad x(0) = 1/2$

$\frac{dx}{dt} = t(x - x^3)$

$\frac{1}{x-x^3}dx = tdt$

$\int \frac{1}{x-x^3}dx = \int tdt$

$\to$Partialbruchzerlegung

$\int \frac{1}{x} + \int \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \int \frac{-\frac{1}{2}}{1-x} = \frac{1}{2}t^2 \quad + C$

$\underbrace{\ln x}_{\frac{1}{2}\ln x^2} - \frac{1}{2}\ln 1 - x - \frac{1}{2}\ln 1 + x = \frac{1}{2}t^2 \quad + C$

$\frac{1}{2}ln\frac{x^2}{1-x^2} = C + \frac{t^2}{2}$

$\frac{x^2}{1x^2} = d \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$

AB: $\frac{1/4}{1-1/4} = d \cdot 1 = \frac{1}{3}$

Nach x auflösen:

$x = \sqrt{\frac{e^{t^2}}{3+e^{t^2}}}$

5.6 Lin. Hom. DGL, konstante Koeff.

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$

Ansatz: überführt DGL in algebr. Gleichung:

$y(t) = e^{\lambda t}$

$y^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t} = \lambda^n \cdot y$

$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$

$y_{allg} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}$

C_i: frei wählbare Koeff.($\rightarrow$ ABs)
Falls mehere λ_k identisch sind:
$e^{\lambda_k t}, t \cdot e^{\lambda_k t}, t^2 e^{\lambda_k t}$
Bsp:
$y'' + 2y' + y = 0$ AB: $y(0) = 1, y'(0) = 0$
$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
$(\lambda + 1)^2 = 0$
$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-1}$

5.7 $\rightarrow$ mit inhom. Teil

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = k(t)$
$y_{allg} = y_{hom} + y_{part}$
$y_{allg} = C_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t} + y_{part}(t)$
Blatter-Script Seite 255

$K(t)$	Ansatz für $y_p(t)$
t^r	$A_0 + A_1 t + \ldots + A_r t^r$
$b_0 + b_1 t + \ldots + b_r t^r, b_i \in \mathbb{R}$	$A_0 + A_1 t + \ldots + A_r t^r$
$e^{\lambda_0 t}, \lambda_0 \in \mathbb{C}$	$A e^{\lambda_0 t}$
$\cos(\omega t), \sin(\omega t)$	$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
doppelte NST	$t(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$
$t^2 e^{-t}$	$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) e^{-t}$

Allgemein: Ansatz von „analoger Form“ aber „allgemeiner“ wie $K(t)$
Alternative: „Variation der Konstanten“
Doppelte NST $\rightarrow$ mit t multiplizieren

6 Integralrechnung

$$\sum \longrightarrow \int$$

$$\lim_{a_{k+1} \to a_k} \sum (a_{k+1} - a_k) \cdot f(a_k)$$

6.1 Regeln

- $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$
- $\int \alpha f = \alpha \int f$
- $\int\limits_{B_1 \cup B_2} f = \int\limits_{B_1} f + \int\limits_{B_2} f$, falls $B_1 \cap B_2 \neq 0$
- $\int\limits_B 1 =$ Volumen von B
- $\left|\int\limits_B f(x)dx\right| \leq M \cdot Vol(B) \quad \exists \epsilon, \int\limits_B f(x) = f(\epsilon) \cdot Vol(b)$
  $M \geq |f(x)|$
- $\boxed{\text{Haupsatz: } \frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)dt = f(x)}$
- $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(t)|_a^b$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x))$
- $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^3}{4} + \frac{x^7}{9} dx = 0$ $\rightarrow$Gerade / Ungerade Funktionen!
- $\boxed{\text{Partielle Integration: } \int\limits_a^b u \cdot v' = u \cdot v|_a^b - \int\limits_a^b u'v}$
- $\boxed{\text{Substitution:}}$ (Bsp)

$\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$
$\rightarrow t = e^x, x = \ln(t), \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, dx = \frac{1}{t}dt$
$= \int \frac{\frac{1}{t}dt}{\sqrt{1+t}}$
$\rightarrow t = u^2 - 1, dt = 2udu, u = \sqrt{1+t}$
$= 2\int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u^2-1} 2udu$
$= 2\int \frac{1}{u^2-1}$
$= 2\int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}$
$= 2\ln(u-1) - \ln(u+1)$
$= 2\ln(\frac{u-1}{u+1})$
Rücksubstitution:
$= 2\ln(\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1}) \quad + C$
$= 2\ln(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}) \quad + C$

Wichtiges Bsp:
$\int \sinh(x) \cdot \sin(x) dx$
$= \cosh(x)\sin(x) - \int \cosh(x) \cdot (cos(x)dx$
$= \cosh(x)\sin(x) - \sinh(x)\cos(x) - \int \sinh(x)\sin(x)dx$
$\Rightarrow 2\int \sinh(x)\sin(x)dx = \cosh(x)\sin(x) - \sinh(x)\cos(x)$
$\Rightarrow \int \sinh(x)\sin(x)dx = \frac{1}{2}(\cosh(x)\sin(x) - \sinh(x)\cos(x))$

6.2 Konvergenzverhalten

$|f(t)| \leq \frac{c}{t^\alpha} \quad \alpha > 1$ ab gewissen t_0 $\forall t > t_0$
$\rightarrow \int\limits_a^\infty f(t)$ konvergent
$|f(t)| \geq \frac{c}{t^\alpha}$
$\rightarrow \int\limits_a^\infty f(t)$ divergent
$|g(t)| \leq \frac{c}{t^\beta} \rightarrow \beta = 1 \rightarrow \int\limits_0^b g(t)$ konvergent
$|g(t)| \geq \frac{c}{t^\beta} \rightarrow \beta = 1 \rightarrow \int\limits_0^b g(t)$ divergent
$\rightarrow$ Abschätzen!

7 Mehrfache Integrale

$\int\limits_B f(u,v) \mathrm{d}\mu A = \int\limits_a^b \int\limits_{u_1(v)}^{u_2(v)} f(u,v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$
Wenn Fläche Parametriesiert (zb. Kugelfläche):
$\int\limits_B f(x,y) \mathrm{d}\mu A = \int\limits_{\tilde{B}} \int \tilde{f}(u,v) \cdot |J| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

7.1 Versch. Jakobi-Det.

- Kugelkoordinaten

$$\vec{x} = x(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} R\sin\varphi\cos\vartheta \\ R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{x_\varphi} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ -R\sin\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x_\vartheta} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ -R\cos\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|J| = |\vec{x_\varphi} \times \vec{x_\vartheta}| = R^2\cos\vartheta}$$

- Zylinderkoordinaten

$$J = \begin{pmatrix} r\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|J| = \cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r}$$

7.2 Vektorfelder

Jedem Punkt wird ein Vektor angehängt. $\vec{f}(x,y,z)$
Integral „uber ein Vektorfeld entland des Weges γ:

$$\int_a^b \vec{K} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}}_{\gamma} dt$$

$(\vec{K} \cdot \vec{\gamma}) \to$ Skalarprodukt

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x(t),y(t),z(t)) \\ Q(x(t),y(t),z(t)) \\ R(x(t),y(t),z(t)) \end{pmatrix}$$

7.3 Gradientenfeld

$K = -\nabla f$
$\oint \vec{K} = \oint -\nabla f = 0$
$= f(a) - f(b) = 0$, bei $a = b$

7.4 Ebene: Green

$$\int_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial S} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y)$$

rot $K = Q_x - P_y$

7.5 Fluss in 2D

$$\int_a^b \underbrace{P(x(t),y(t),z(t)) \cdot \dot{y}(t) - Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot \dot{x}(t)}_{<\vec{n};\vec{K}>} dt$$

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}_\perp = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$$

$$\oint_B \vec{K} \cdot \vec{n}\, ds = \int_B \underbrace{divK}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{K} = P_x + Q_y + R_z} dA$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{K} = \vec{\nabla} \cdot \vec{K} = P_x + Q_y + r_z}$$

7.6 Fluss durch Fläche (3D)

$\int_B \vec{K} = \langle f_u, f_v \rangle\, dudv$
normale: $\frac{\langle f_u, f_v \rangle}{|\langle f_u, f_v \rangle|}$
$|J| = \langle f_u, f_v \rangle$
$\int_B \vec{K} \cdot \frac{\langle f_u, f_v \rangle}{|\langle f_u, f_v \rangle|} \cdot |\langle f_u, f_v \rangle| dudv$

Gauss

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

7.7 Stokes

$\int_{\partial S} \vec{K} d\vec{s} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{K} \cdot d\vec{\omega}$
$\int \mathrm{rot}\,\vec{K} \underbrace{\langle f_u, f_v \rangle}_{\vec{n}} dudv$
Orietierung beachten!

Bsp:

$$f = \begin{pmatrix} y \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix} = \vec{K} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

Fluss durch Dreieck mit den Koordinaten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$:

$$\mathrm{rot}\,\vec{K} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2x \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$g(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_\lambda = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ g_\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle g_\lambda, g_\mu \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda + \mu = 1$
$x = 1 - \lambda - \mu$
$y = \dots$
$z = \mu$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\mu} \begin{pmatrix} -x \\ -2x \\ z-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda d\mu$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\mu} -4 + 3\lambda + 4\mu d\lambda d\mu = \int_0^1 -4\lambda + \tfrac{3}{2}\lambda^2 + \lambda\mu\Big|_0^{1-\mu} d\mu$$

$$= \tfrac{-5}{2}\mu + \tfrac{5}{2}\mu^2 - \tfrac{5}{6}\mu^2\Big|_0^1 = \tfrac{-5}{6}$$

8 Vektorrechnung

8.1 Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

8.2 Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \Big\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Big\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

8.3 Norm

$$\left\| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}$$

8.4 Normalenvektor

2 Vektoren in einer Ebene: $\vec{a}$, $\vec{b}$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \underbrace{\frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|}}_{\text{Normierung}}$$

8.5 Potentialfeld

$\vec{V}$ist ein Potentialfeld $\Leftrightarrow$ rot $\vec{V} = 0$
Potential: $\nabla\varphi = \vec{V}$
φ ist ein Skalarfeld. Wenn dieses abgeleitet wird erhält man *immer* ein Vektorfeld. Aber: Nicht jedes Vektorfeld hat ein Potentialfeld.

8.6 Linienintegral

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt$$

8.7 Rotation

$$\mathrm{rot}\, K = \mathrm{rot} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$$

8.8 Divergenz

$$\mathrm{div}\, \vec{K} = \vec{\nabla} \cdot \vec{K} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = P_x + Q_y + rR_z$$

8.9 Laplace-Operator

$\triangle \overset{\rightarrow}{=} \nabla \cdot \nabla$

$$\triangle\, \vec{K} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2}{\delta xx} \\ \frac{\delta^2}{\delta yy} \\ \frac{\delta^2}{\delta zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = P_{xx} + Q_{yy} + R_{zz}$$